Cours sur le calcul de probabilité

1. Généralités

a. Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat est imprévisible (le résultat n'est pas connu à l'avance).

Exemples

- Lancer d'une pièce de monnaie
- Lancer d'un dé
- Résultat d'un examen
  Etc…

Sont des expériences aléatoires.

b. Univers

On appelle **univers** d'une expérience aléatoire l'ensemble des résultats possibles de cette expérience. L'univers est noté **Ω.**

Exemples

- Lancer d'une pièce de monnaie.
  Ω= {pile, face}
- Lancer d'un dé.
  Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Résultat d'un examen.
  Ω= {succès, échec}
  Etc…

c. Evènement

On appelle **évènement** d'une expérience aléatoire d'univers Ω, toute partie ou sous ensemble de Ω.

Exemples

Lancer d'un dé. Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A= {1, 2, 3, 4}, B= {1, 2}, C= {6} sont des évènements

Remarques

- Tout singleton de Ω est appelé **évènement élémentaire**.
- L'ensemble vide (∅) est appelé **l'évènement impossible**.
- L'ensemble Ω est appelé l'**évènement certain.**
- Si A est un évènement alors $\overline{\mathbf{A}}$ est l'**évènement contraire**.
- Deux évènements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- L'ensemble AUB est appelé l'évènement « A ou B ».
- L'ensemble $A \cap B$ est appelé l'évènement « A et B ».

2. Probabilité d'un évènement

a. Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle **probabilité** sur Ω toute application p de $\mathcal{P}(\Omega)$(l'ensemble des parties de Ω) à valeurs dans $[0; 1]$ telle que :

- p (∅)=0 et $\mathrm{p}(\Omega) = 1$
- $\forall\ \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega),\ 0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$
- La probabilité p(A) d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent : si A=$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ alors p(A)= p ($\{\omega_1\}$) + p ($\{\omega_2\}$) +… + p ($\{\omega_n\}$)

Exemples

- On lance un dé parfait numéroté de 1 à 6.

On a 1 chance sur 6 d'avoir le numéro 1 : si on pose A l'évènement « obtenir le numéro 1» alors p(A)=$\frac{1}{6}$

On a 2 chances sur 6 d'avoir le numéro 3 ou le numéro 4 : si on pose B l'évènement « obtenir le numéro 3 ou le numéro 4» alors p(B)=$\frac{2}{6}$

- Dans une classe, 50% des élèves jouent au football, 30% des élèves jouent au basketball et 20% jouent au tennis.

Notons A l'évènement « l'élève joue au football », B l'évènement « l'élève joue au basketball » et C l'évènement « l'élève joue au tennis »

Alors on a p(A)= $\frac{50}{100} = 0{,}5$, p(B)= $\frac{30}{100} = 0{,}3$ et p(C)= $\frac{20}{100} = 0{,}2$

b. Cas d'équiprobabilité

On dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Exemples

- dé parfait
- une urne contient n boules indiscernables au toucher
- jeu de cartes bien battues

  etc…

sont des cas d'équiprobabilité

Considérons une situation d'équiprobabilité où l'univers Ω = $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

p(Ω)= p ($\{\omega_1\}$) + p ($\{\omega_2\}$) +… + p ($\{\omega_n\}$), $\mathrm{p}(\Omega) = 1$ donc

p ($\{\omega_1\}$) + p ($\{\omega_2\}$) +… + p ($\{\omega_n\}$)=1. Or p ($\{\omega_1\}$) =p ($\{\omega_2\}$) =… = p ($\{\omega_n\}$)

n p ($\{\omega_1\}$)=1 donc p ($\{\omega_1\}$)=$\frac{1}{n}$

d'où p ($\{\omega_i\}$)=$\frac{1}{n}$ pour i=1, …, n

Posons A= $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$ où $p \leq n$, A est un évènement et d'après ce qui précède

$p(\mathrm{A}) = \frac{p}{n} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$. On a le résultat suivant :

Dans le cas d'équiprobabilité la probabilité d'un évènement A est :

$$\boldsymbol{p}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{card(A)}}{\mathbf{card(\Omega)}} = \frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}}$$

Exemples

Une urne contient 2 boules bleues, 3 boules rouges, 4 boules jaunes et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) A : « tirer 1 boule verte exactement ».
   b) B : « tirer 2 boules jaunes exactement ».
   c) C : « tirer 1 boule rouge et 2 boules vertes exactement ».
   d) D : « tirer au plus 3 boules vertes ».
   e) E : « tirer au moins 2 boules jaunes ».
   f) F : « tirer 4 boules de couleurs différentes ».
   g) G : « tirer 4 boules de même couleur ».
3. Répondre aux mêmes questions avec un tirage successif et sans remise.
4. Répondre aux mêmes questions avec un tirage simultané.

Solution

L'urne contient 14 boules

On tire successivement et avec remise 4 boules

1. Le nombre de tirages possibles est : card(Ω)=$14^4 = 38416$
2. La probabilité des évènements suivants :
   a) P(A)=$\frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(A)} = 2^1 C_4^1 12^3 = 13824$, $\mathrm{P(A)} = \frac{13824}{38416}$
   b) P(B)=$\frac{\mathrm{card(B)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(B)} = 4^2 C_4^2 10^2 = 9600$, $\mathrm{P(B)} = \frac{9600}{38416}$
   c) P(C)=$\frac{\mathrm{card(C)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(C)} = 3^1 C_4^1 5^2 C_3^2 6^1 = 5400$, $\mathrm{P(C)} = \frac{5400}{38416}$
   d) P(D)=$\frac{\mathrm{card(D)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(D)} = 5^3 C_4^3 9^1 + 5^2 C_4^2 9^2 + 5^1 C_4^1 9^3 + 5^0 C_4^0 9^4$, $\mathrm{P(B)} = \frac{37791}{38416}$
   e) P(E)=$\frac{\mathrm{card(E)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(E)} = 4^2 C_4^2 10^2 + 4^3 C_4^3 10^1 + 4^4 C_4^4 10^0$, $\mathrm{P(E)} = \frac{12416}{38416}$
   f) P(F)=$\frac{\mathrm{card(C)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(F)} = 2^1 C_4^1 3^1 C_3^1 4^1 C_2^1 5^1 = 2880$, $\mathrm{P(F)} = \frac{2880}{38416}$
   g) P(D)=$\frac{\mathrm{card(G)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$, $\mathrm{card(G)} = 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 978$, $\mathrm{P(G)} = \frac{978}{38416}$
3. Exercice.
4. Exercice.

c. Propriétés

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements.

- ✓ $\boldsymbol{p}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \boldsymbol{p}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{p}(\mathbf{B}) - \boldsymbol{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
- ✓ Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $\boldsymbol{p}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \boldsymbol{p}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{p}(\mathbf{B})$
- ✓ $\boldsymbol{p}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}(\mathbf{A})$
- ✓ $\boldsymbol{p}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = \boldsymbol{p}(\mathbf{A}) - \boldsymbol{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

Preuve exercices

3. Probabilités conditionnelles

a. Activité

Une classe de terminale compte 20 élèves dont 12 filles et 8 garçons. Parmi ces élèves il y a 8 filles et 6 garçons qui étudient l'anglais.

1. On choisit un élève au hasard dans cette classe.
   a) Quelle est la probabilité de choisir un garçon.
   b) Quelle est la probabilité de choisir une fille.
   c) Quelle est la probabilité de choisir un élève étudiant l'anglais.
   d) Quelle est la probabilité de choisir une fille étudiant l'anglais.
   e) Quelle est la probabilité de choisir un garçon étudiant l'anglais.
2. On choisit au hasard une fille. Quelle est la probabilité qu'elle étudie l'anglais.

Solution

Notons F l'évènement «l'élève choisi est une fille », G l'évènement « l'élève choisi est un garçon » et A l'évènement « l'élève choisi étudie l'anglais »

1. Ici, l'univers Ω est constitué 20 évènements élémentaires équiprobables. On a donc :
   a) p(G)=$\frac{\text{card(G)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{20}$
   b) p(F)=$\frac{\text{card(F)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12}{20}$
   c) p(A)=$\frac{\text{card(A)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{14}{20}$
   d) p(A ∩ F)=$\frac{\text{card(A}\cap\text{F)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{20}$
   e) p(A ∩ G)=$\frac{\text{card(A}\cap\text{G)}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{20}$
2. Maintenant, l'univers est l'ensemble des filles de la classe et nous nous intéressons à celles étudiant l'anglais. Notons p' cette probabilité on a donc :
   p'= $\frac{\text{card(A}\cap\text{F)}}{\text{card(F)}} = \frac{8}{12}$

La probabilité p' s'appelle la **probabilité conditionnelle de A par rapport à F** ou la **probabilité de A sachant F** et on la note $p(\mathrm{A/F})$ ou $p_F(\mathrm{A})$, $\mathrm{A/F}$ représente l'évènement **« A est réalisé sachant que F est réalisé ».**

Et on a le résultat suivant:

$$\boldsymbol{p}(\mathbf{A/F}) = \frac{\boldsymbol{p}(\mathbf{A\cap F})}{\boldsymbol{p}(\mathbf{F})}$$

b. Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et B un évènement tel que $p(B) \neq 0$. La quantité $\boldsymbol{p}(\mathbf{A/B})$ est appelée la probabilité de A sachant B et est définie par :

$$\boldsymbol{p}(\mathbf{A/B}) = \frac{\boldsymbol{p}(\mathbf{A\cap B})}{\boldsymbol{p}(\mathbf{B})} \quad \forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Remarques

- Si $p(\mathrm{A}) \neq 0$ alors $p(\mathrm{B/A}) = \frac{p(\mathrm{B\cap A})}{p(\mathrm{A})}$
- $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A/B})p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B/A})\, p(\mathrm{A})$
- l'événement contraire de $A \mid B$ est $\bar{A} \mid B$ ("*A* n'est pas réalisé" sachant que *B* l'est).

c. Propriété (Formule des probabilités totales)

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Si des parties $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2, \ldots,\mathrm{B}_n$, de probabilités non nulles, constituent une partition de Ω, alors pour tout évènement, on a :

$$\boldsymbol{p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} p(A \,/\, B_k)p(B_k)}$$

Exemple1

On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir face est $\frac{2}{5}$. On lance la pièce.

Si on obtient pile on tire un jeton dans un sac 1 contenant 6 jetons numérotés de 1 à 6.

Si on obtient face on tire un jeton dans un sac 2 contenant 4 jetons numérotés de 1 à 4.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton de numéro pair.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir face sachant qu'on a un jeton de numéro impair.

Exemple2

Pour lutter contre une maladie M, 70% de la population d'une ville ont été vaccinés. Une étude a révélé que 5% des vaccinés ont contracté la maladie M contre 65% des non vaccinés.

1. Quelle est la probabilité d'avoir la maladie M.
2. Quelle est la probabilité d'être vacciné sachant qu'on n'a pas la maladie M.