Fonctions exponentielles

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Définition

On appelle fonction exponentielle (népérienne) la bijection réciproque de IR dans IR_+^* de la fonction logarithme népérien.
Notation : l'exponentielle de x est notée : exp(x) ou e^x

$$\begin{cases} x = \ln y \\ y \in IR_+^* \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} y = e^x \\ x \in IR \end{cases}$$

Conséquences de la définition

- La fonction exponentielle est définie sur IR : e^x existe $\forall x \in IR$
- L'exponentielle d'un réel est toujours positive : $e^x > 0$, $\forall x \in IR$
- $\forall x \in IR, \forall y \in IR$
  $e^x = e^y <=> x = y$
  $e^x > e^y <=> x > y$
  $e^x < e^y <=> x < y$
- $\forall x \in IR, \forall\, a \in]0, +\infty[$: $e^x = a <=> x = lna$. Exemple : $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$
- $\forall x \in]0, +\infty[, e^{lnx} = x$. Exemple : $e^{\ln 3} = 3$

Propriétés

$e^0 = 1 \quad e^1 = e \quad e^{1/2} = \sqrt{e} \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$

$e^x . e^y = e^{x+y} \qquad x \in IR, \quad y \in IR$

$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad x \in IR, \quad y \in IR$

$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \qquad x \in IR$

$(e^x)^\alpha = e^{\alpha x} \qquad \alpha \in Q, \quad x \in IR$

Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 1\,(\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0 \quad (\alpha > 0)$

Limites de la forme $e^{u(x)}$

Il y a 3 cas possibles. Soit $a \in IR$, a = - ∞ ou a = + ∞

- Si $\lim_{x \to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = 0$
- Si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \to a} u(x) = k$, alors $\lim_{x \to a} e^{u(x)} = e^k$

Dérivation avec l'exponentielle

Si u est une fonction dérivable, alors $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.
Si a est un réel, $(e^{ax})' = a\, e^{ax}$.
Cas particulier : $(e^x)' = e^x$
Exemples : $(e^{x^2+1})' = 2xe^{x^2+1}$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$; $(e^{3x})' = 3e^{3x}$

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Définition

Pour tout a de $IR_+^* - \{1\}$, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.
On la note $y = a^x$.

$$\begin{cases} y = a^x \\ y \in IR_+^* \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x = \log_a y \\ x \in IR \end{cases}$$

Relation entre exponentielle népérienne et exponentielle de base a
$a^x = e^{x \ln a}$.

Dérivée

Pour tout x de IR, $f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a (a^x)$, pour tout a de $IR_+^* - \{1\}$

FONCTION PUISSANCE

Définition

Soit α 1 réel, la Fonction Puissance est définie pour x strictement positif par :

$$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Dérivée

$$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

Cas particuliers

Si $\alpha = \dfrac{1}{q}$, $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ $x \in IR_+$, $q \in IN^*$. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

Si $\alpha = \frac{p}{q}$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ $x \in IR_+^*$, $p \in Z$, $q \in IN^*$.

CROISSANCE COMPAREE DES FONCTIONS

LOGARITHMES, EXPONENTIELLES

ET PUISSANCES

$\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

Exercices

I. Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $2e^x - 4 = 0$ b) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ c) $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 3} = 2$ d) $e^{2x+2} + e^{x+2} = 4e^2$

II. Résoudre dans IR² les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 10 \\ e^x + 4e^y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2e^x - 4e^y = -6 \\ -e^x + 3e^y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 14 \\ e^x \times e^y = e^{-9} \end{cases}$

III. Résoudre dans IR les équations :

a) $e^{x^2} \times e^x < e^6$ b) $e^{x^2} > (e^x)^3 \times e$ c) $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$ d) $3e^{2x} - 10e^x + 3 \langle 0$

e) $(2e^x + 4)(e^{2x} - 3e^x + 2)(e^x - 1)\rangle 0$ f) $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} \rangle \ln e^{x+1}$

IV. Résoudre dans IR :

a) $e^{x^2} \times e^x = e^6$ b) $\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 2} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

c) $4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$ d) $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$

e) $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$ f) $2^{2x} - 5 \times 2^{x+1} + 16 = 0$

V. Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

a) Résoudre $P(x) = 0$, b) Résoudre $\dfrac{2e^{3x} - 3e^{2x}}{3e^x - 2} = 1$

VI. Résoudre dans IR :

a) $e^{3x} - 4e^{2x} < \dfrac{-3}{e^{-x}}$ b) $e^{1+\ln x} \geq 2$ c) $e^{2(x+1)} + 3e^{x+2} \geq 4e^2$

VII. Résoudre dans IR² :

a) $\begin{cases} e^x = e^{2-y} \\ \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ (e^x + e^y)(e^x - e^y) = 2 \end{cases}$

VIII. x désigne un nombre réel strictement positif.
Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1) $e^{x + \ln x}$ 2) $e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$ 3) $\dfrac{e^{\ln x}}{\ln(e^x)}$ 4) $\dfrac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x^2})}$

IX. Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$
2) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$
3) $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 - \ln x - 4 = 0$

X. Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $e^{-3x-2} > 3$ 2) $e^{x-6} > 1$ 3) $e^{-2x+3} \geq 6$

4) $e^{-x+4} - 8 \geq 0$ 5) $e^{x+2} < 8$ 6) $e^{x-3} + \dfrac{3}{2} \leq 2$

XI. Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $2e^{2x} + 5e^{x} - 3 \leq 0$ 2) $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$
3) $e^{2x} + 8e^{x} + 15 \leq 0$ 4) $e^{2x} - 4e^{x} + 3 > 0$

XII. On considère le polynôme suivant :

$$p(x) = -x^3 + 7x - 6$$

1. Ecrire p(x) sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans IR l'inéquation : $e^{3x} - 7e^{x} + 6 < 0$

XIII. Pour tout x de IR, on pose :

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1. a) Vérifier que $P(-1) = 0$
   b) Ecrire P(x) sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré
   c) En déduire la résolution dans IR de l'inéquation : $P(x) \leq 0$
2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans IR les inéquations suivantes :
   1) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$
   2) $2\ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(5x+2)$

XIV. Résoudre dans IR² les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2^y = 11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

XV. Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K donné.

1) $f(x) = e^{2x}\ln x$ avec $K =]0 ; +\infty[$
2) $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$ avec K = IR
3) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ avec K = IR
4) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$ avec K = IR
5) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ avec K = IR
6) $f(x) = e^{x^3}$ avec K = IR
7) $f(x) = \dfrac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}$ avec $K =]0 ; +\infty[$

XVI. Pour chacun des cas suivants, on considère la fonction f de IR vers IR définie ci-dessous.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Démontrer que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 2) $f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}}$
3) $f(x) = e^{\ln x}$ 4) $f(x) = (3x+2)e^{x}$
5) $f(x) = \dfrac{x}{1-e^x}$ 6) $f(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^{x}$

XVII. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} e^x \ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x e^{2x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{e^{x+1}}$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^{2x} - e^x)$

XVIII. Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{2+e^x}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2e^x - 1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1} (x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$

XIX. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{1-3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{5x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{5x}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x - e^{3x}}{e^{x+2}}$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x-5}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+3)e^x$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} e^x$

XX. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$

XXI. Résoudre l'équation proposée :

1°) $e^{2x} + e^x = 2$ 2°) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$ 3°) $e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^x + 1$

4°) $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ 5°) $e^{2x+1} + 4e^{x+1} = 3(e^x + 4)$ 6°) $3e^{4x-2} + e^{2x-1} - 4 = 0$

7°) $2e^{2(x+3)} - 5e^{x+4} + 2e^2 = 0$ 8°) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$

9°) $2\ln^3 x - 5\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$ 10°) $(2\ln x - 5)\ln x = -2$ 11°) $\dfrac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 3$

12°) $2.100^x + 2 = 5.10^x$ 13°) $\log_2 x - \dfrac{5}{2}\log_2 x = -1$ 14°) $2^{2x} - 5.2^{x-1} = -1$

15°) $3^{x+4} - 9^x = 1458$ 16°) $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$

XXII. x est un réel.

1) Effectuer le produit P(x) = (2x – 1) (x – 2) (x + 1)
2) Résoudre dans IR les équations suivantes :
a) P(x) = 0.
b) $\dfrac{2e^{3x} - 3e^{2x}}{3e^x - 2} = 1$
3) a) Pour quelles valeurs de x la fonction f(x) = ln(x + 1) est elle définie ?
b) Résoudre dans IR l'équation : $2.[\ln(x+1)]^3 - 3.[\ln(x+1)]^2 - 3.\ln(x+1) + 2 = 0$

XXIII. Dresser le tableau de variation des fonctions f suivantes :

1°) $f(x)=\left(e^{x}-e\right)^{2}$ 2°) $f(x)=e^{-x^{2}}+3x-2$ 3°) $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)$

XXIV. f est la fonction suivante $f(x)=3x+1+\dfrac{1}{e^{x}}$

1) a) Etudier les variations de f.
   b) (C) est la courbe représentant f dans un repère orhonormé (unité : 1 cm).
   Montrer que la droite d'équation y = 3x + 1 est asymptote à la courbe (C).
2) a) Déterminer l'équation de la tangente (C) au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.
   b) Construire (C).

XXV. Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = ax + b + ce^{x}$
Où a, b, c sont trois nombres réels. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Déterminer a, b, c de façon que (C) soit tangente en O à l'axe des abscisses et que la tangente à (C) au point d'abscisse x = 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1.
2) Etudier la fonction f_1 définie sur IR par : $f_1(x) = x + 1 - e^{x}$
   Soit (C_1) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Démontrer que la droite d'équation y = x + 1 dans ce repère est asymptote à (C_1) ; tracer cette droite et (C_1) sur le même graphique.
3) En utilisant (C_1), discuter selon les valeurs du réel m le nombre de solutions, dans IR, de l'équation : $e^{x} = x + m$

XXVI. Soit la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^{x}-3}{2}$

1) Donner le domaine de définition de f et la limite quand x tend vers - ∞.
2) Montrer que $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}\left(1-\dfrac{2}{e^{x}}-\dfrac{3}{e^{2x}}\right)$
   En déduire la limite de f quand x tend vers + ∞.
3) Calculer la dérivée f ′ et faire le tableau de variation de f.
4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   a) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
   b) Ecrire l'équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).
   c) Tracer (C) et (T).

Pour tracer la courbe on pourra prendre ln3 = 1,1 ; e = 2,7 ; e² = 7,4.

XXVII. Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x + 1)^2e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer la limite de f en - ∞. Montrer que (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) quand x tend vers - ∞.
   b) Déterminer la limite de f en + ∞. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.
   b) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé.
   c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle I = [1, + ∞[(g(x) = f(x) sur cet intervalle.)
   a) Justifier que g réalise une bijection sur I vers un intervalle J à préciser.

b) Calculer g(3). En déduire $(g^{-1})\left(\frac{16}{e^3}\right)$ puis $(g^{-1})'\left(\frac{16}{e^3}\right)$.

c) Tracer la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère.

XLI.

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - 2x$.

1) Etudier les variations de g.
2) En déduire le signe de g(x).

B) Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 + \frac{2x+2}{e^x}$

1) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f.
2) Montrer que (D) : $y = x - 1$ est une asymptote oblique pour C_f en $+\infty$ puis étudier les positions relatives de C_f et (D).
3) Quelle est la direction de la branche parabolique en $-\infty$?
4) Déterminer f '(x) puis vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ et dresser le tableau de variation de f.
5) Montrer que h bijective de I = IR vers un intervalle J à préciser.
6) Calculer f(ln2) et en déduire $(f^{-1})'(2\ln 2)$.
7) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α puis vérifier que $\alpha \in \left]\frac{-11}{10}; 0\right[$
8) Tracer C_f et C_f^{-1}.

XLII.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 6e^x + 5)$.

1- Résoudre dans IR $e^{2x}-6^{ex}+5>0$ et en déduire D_f.
2- Montrer que C_f admet deux asymptotes verticales et une asymptote horizontale.
3- Montrer que $e^{2x} - 6e^x + 5 = e^{2x}(1 - \frac{6}{e^x} + \frac{5}{e^{2x}})$ et en déduire que $f(x) = 2x + \ln(1 - \frac{6}{e^x} + \frac{5}{e^{2x}})$
4- En déduire que (D) :y=2x est asymptote oblique pour C_f en $+\infty$
5- Dériver f et dresser son tableau de variation.
6- Soit la fonction h telle que h(x)=f(x) $\forall x \in I =]\ln 5, +\infty[$.
   a- Montrer que h est bijective de I vers J à préciser.
   b- Résoudre dans IR h(x)= 2ln2 + ln3 et en déduire $(h^{-1})'(\ln 12)$.
7- Déterminer les points d'intersections de C_f avec l'axe des abscisses.

Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$