SERIE D'EXERCICES SUR LES SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 :

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \sqrt{2 + V_n} \end{cases}$

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Montrer que (V_n) est positive.
3. Montrer que (V_n) est minorée par 2.
4. Montrer que (V_n) est décroissante.
5. Etudier la convergence de (V_n) et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$

EXERCICE 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $3 \leq U_n \leq 6$.
2. Etudier le sens de variation de cette suite.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $U_n = -\frac{1}{3^{n-2}} + 6$
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $6 - U_n < 10^{-6}$.

EXERCICE 3 :

Soit (U_n) la suite définie par $u_n = e^{-2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera ses éléments caractéristiques.
2. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + U_2 + \ . \ . \ . + U_n$.

a- Exprimer S_n en fonction de n.

b- Etudier la convergence de la suite (S_n) .

c- Déterminer la valeur minimale de n tel que $S_n \geq 10^{-6}$

3. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \ln(U_n)$

a- Montrer que (V_n) existe et qu'elle est arithmétique. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

b- On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + V_2 + \ . \ . \ . + V_n$. Exprimer T_n en fonction de n.

c- On pose $P_n = U_0 \times U_1 \times \ . \ . \ . \ U_n$. Exprimer P_n en fonction n .

d- Etudier la convergence des suites (T_n) et (P_n) .

EXERCICE 4 :

Soit $a = -1 - i$ et (Z_n) la suite de nombres complexes définie par : : $\begin{cases} Z_0 = 0;\ Z_1 = i \\ Z_{n+1} = (1-a)Z_n + aZ_{n-1} \end{cases}$

1. Déterminer Z_1 et Z_3.

2. Dans le plan on considère les points $A_0(Z_0)$; $A_1(Z_1)$; …. ; $A_n(Z_n)$.

a- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.

b- Démontrer que $S(A_n) = A_{n+1}$

3. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = Z_{n+1} - Z_n$, $\forall$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a- Calculer U_0 et U_1.

b- Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $-a$.

4. Soit $\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_k} = \mathrm{U_0} + \mathrm{U_1} + \mathrm{U_2} + \ .\ .\ . + \mathrm{U_n}$. Exprimer $S_n$en fonction de Z_n puis en déduire Z_n en fonction de n.

EXERCICE 5 :

Soit la suite géométrique décroissante telle que : $U_1 \times U_2 = 144$ et $U_1 + U_2 + U_3 = 63$

1. Déterminer la raison q et le 1er terme U_1.

2. Montrer que $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 3 \times 4^{3-n}$

3. On pose $\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{U_k} = \mathrm{U_1} + \mathrm{U_2} + \ .\ .\ . + \mathrm{U_n}$. Exprimer $\mathrm{S_n}$ en fonction de n. Quelle est la limite de $\mathrm{S_n}$?

4. Soit (V_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $V_n = \ln(U_n)$.

a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le 1er terme.

b- On pose : $P_n = \prod_{p=1}^{n} U_p = U_1 \times U_2 \times . . . \times U_n$. Exprimer P_n en fonction de n et calculer sa limite.

EXERCICE 6:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. S est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Soit M le point d'affixe Z et M' le point d'affixe Z' avec $M' = S(M)$.

1. Exprimer Z' en fonction de Z.
2. On définit la suite de points $(\mathrm{M_n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$\begin{cases} \mathrm{Mo(\ Zo = 1 + i)} \\ \mathrm{Mn = S(M_{n-1})\ pour\ n\ \geq 1} \end{cases}$ avec Z_n est l'affixe de M_n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

a- Déterminer les affixes des points M_1, M_2 et M_3

b- Exprimer Z_n en fonction de Z_{n-1} pour n ≥ 1.

c- En déduire que $Z_n = \left(\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n Z_0$

d- Soit $a_n = |Z_n|$, montrer que a_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Etudier la convergence de la suite (a_n), n $\in$ IN.

EXERCICE 7 :

1. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

a- Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $[0; 1]$, et dresser le tableau de variations de $h(x)$.

b- En déduire que pour tout réel x de $[0; 1]$, $h(x)$ appartient à [0 ; 1].

c- Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de $[0; 1]$; étudier le sens de variation de $h'(x)$.

d- En déduire que, pour tout réel x de $[0; 1]$; $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$

2. Etudier les variations de la fonction g définie sur$[0; 1]$ par $g(x) = h(x) - x$. En déduire que l'équation que $h(x) = x$ possède une unique solution α.

3. On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

a- Démontrer que pour tout entier naturel n, U_n appartient $[0; 1]$

b- Démontrer que pour n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

c- En déduire que, pour n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n |U_n - \alpha|$ et que la suite (U_n) converge vers α.

d- Déterminer un entier p tel que U_P soit une valeur approchée à 10^{-6}prés de α .