



CHAPITRE 07: LES SUITES NUMERIQUES

PLAN DU COURS

I. Généralités sur les suites numériques

1- Définition et Notations

2- Modes de définition d'une suite numérique

- a - Suite numérique définie par une formule explicite
- b- Suite numérique définie par une relation de récurrence

3- Démonstration par récurrence

4- Suites majorées-minorées-bornées

5- sens de variation d'une suite numérique

6- Représentation graphique d'une suite numérique

- a- Cas d'une suite définie par une formule explicite
- b- Cas d'une suite définie par une formule de récurrence

7-Limites D'une Suite Numérique

- a-limite d'une définie par une formule explicite
- b- limite d'une suite définie par une formule de récurrence

8- Suite convergente

II. Suites arithmétiques-Suites géométriques

1 - Suites arithmétiques

2- Suites géométriques

I. Généralités sur les suites numérique

1) Définition et notations

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Notation

Soit U une suite numérique. Désignons par E , une partie de $\mathbb{N}$ son ensemble de définition. On a les notations suivantes :

Notation fonctionnelle $U: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \rightarrow U(n).$$

Notation indicielle $(U_n)_{n \in E}$

Vocabulaire

$U(n)$ ou U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite numérique.

- Le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n .

Remarque

Il ne faut pas confondre terme de rang n et terme d'indice n , qui sont deux concepts bien distincts.

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_n = \frac{2n+1}{n+2}$

Le terme général de cette suite est : $\frac{2n+1}{n+2}$

Le premier terme est $U_0 = \frac{1}{2}$

Le $15^{\text{ième}}$ terme ou terme de rang 15 est $U_{14} = \frac{29}{16}$

Le terme d'indice 15 est $U_{15} = \frac{31}{17}$

2) Modes de définition d'une suite numérique

a) Suite numérique définie par une formule explicite

Il s'agit de donner une formule explicite qui permet de définir le terme général U_n en fonction de n . On écrit alors $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Exemple : Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique de terme général $V_n = \sqrt{n^2 - 1}$. Cette suite est déterminée par une formule explicite. le premier terme est $V_1 = 0$; le second est $V_2 = \sqrt{3}$.

b) Suite numérique définie par une relation de récurrence

Dans ce cas, on donne le ou les premier(s) terme(s) de la suite et une relation liant un ou deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple : Soit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = -\frac{1}{2}W_n + 3 \end{cases}$$

Cette suite est définie par son premier terme et une relation de récurrence. On a $W_1 = 3$, $W_2 = 3$

Exemple : Soit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 1; F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Cette suite est définie par une relation de récurrence et est appelée suite de **Fibonacci**.

On a $F_2 = 2$; $F_3 = 3$

3) Démonstration par récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède par étapes :

- ✓ On vérifie que la propriété $P(n)$ est vraie au premier rang n_0 .
- ✓ On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie à un rang $p \geq n_0$.
- ✓ On montre que la propriété $P(n)$ est vraie au rang $p + 1$ (en utilisant le plus souvent la supposition appelée hypothèse de récurrence).
- ✓ Puis on tire la conclusion que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$

Exemple 1 : soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = 2^{n+1} - 3n - 2$

Prouver que $U_n \geq 0 \quad \forall n \geq 2$

Exemple 2 : soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$

Démontrer que $U_n \geq -\frac{1}{2} \quad \forall n$

4) Suites majorées-minorées-bornées

Soit (U_n) une suite numérique.

a) Définitions

- ✓ (U_n) est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$
- ✓ (U_n) est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$
- ✓ La suite (U_n) est dite bornée si elle est la fois majorée et minorée.

Remarque

- ✓ (U_n) est dite positive, lorsque $\forall n \in E, U_n \geq 0$
- ✓ (U_n) est dite négative, lorsque $\forall n \in E, U_n \leq 0$

b) Méthodes

Soit (U_n) une suite numérique.

Pour montrer que (U_n) est minorée ou majorée par un réel k , on peut :

- ✓ étudier le signe de $U_n - k$
- ✓ démontrer par récurrence
- ✓ utiliser les variations de la fonction $f(x)$ associée à la suite (U_n) si (U_n) est définie par une formule explicite.

Exemple : La suite de terme général $V_n = \frac{n+2}{n+1}$ est bornée.

Correction

Soit $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ définie sur $[0; +\infty[$ la fonction associée à la suite (U_n) .

$f(x)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ car étant une fonction rationnelle et on a $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Après avoir fait le tableau de variation de $f(x)$, vous allez remarquer que $f(x) \in]1; 2]$

On peut en déduire que $U_n \in]1; 2]$

5) sens de variation d'une suite (suites monotones)

a- Définitions

- ✓ On dit que (U_n) est croissante si pour tout $n \in E, U_n \leq U_{n+1}$.
- ✓ On dit que (U_n) est décroissante si pour tout $n \in E, U_n \geq U_{n+1}$
- ✓ On dit que (U_n) est constante si pour tout $n \in E, U_n = U_{n+1}$
- ✓ On dit que (U_n) est stationnaire s'il existe un rang à partir duquel la suite (U_n) est constante.

Remarques

- ✓ On dit que (U_n) est strictement croissante si pour tout $n \in E, U_n < U_{n+1}$.
- ✓ On dit que (U_n) est strictement décroissante si pour tout $n \in E, U_n > U_{n+1}$.

b- Méthodes

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (U_n) , on peut :

- ✓ étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.
 - si $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors la suite (U_n) est croissante
 - si $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors la suite (U_n) est décroissante
- ✓ comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 Si **la suite est positive**.
 - si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors la suite est strictement croissante
 - si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors la suite est strictement décroissante
 - si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ pour tout $n \in E$ alors la suite est strictement croissante
- ✓ Si (U_n) est définie par une formule explicite alors le sens de variation de $f(x)$ est le même que celui de (U_n)
- ✓ Démontrer par récurrence si la suite est définie par une formule de récurrence.

Exemple

La suite (U_n) définie par $U_n = 3n + 1$ est croissante. La suite (V_n) définie par $V_n = -2n + 3$ est décroissante.

6) Représentation graphique d'une suite numérique

a) Cas d'une suite définie par une formule explicite

Soit (U_n) la suite définie par une formule explicite et $f(x)$ la fonction associée à la suite (U_n)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

Pour représenter les termes de (U_n) , on procède de la façon suivante :

- ✓ Tracer la courbe (C_f) de $f(x)$
- ✓ Placer les indices n sur l'axe des abscisses
- ✓ Pour chaque indice n , projeter sur (C_f) puis sur l'axe des ordonnées pour obtenir U_n

Exemple

Soit (U_n) la suite de terme général $U_n = 6 - n^2$. Représenter les 4 premiers termes de (u_n) .

b) Cas d'une suite définie par une formule de récurrence

Soit (U_n) la suite définie par une formule de récurrence et $f(x)$ la fonction associée à la suite (U_n)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

Pour représenter les termes de (U_n) , on procède de la façon suivante :

- ✓ Tracer la droite $(\Delta): y = x$ appelée première bissectrice
- ✓ Tracer la courbe (C_f) de $f(x)$
- ✓ Placer le premier terme de (U_n) sur l'axe des abscisses, le projeter sur (C_f) puis sur l'axe des ordonnées et sur (Δ) et enfin sur (Ox) pour obtenir le second terme sur l'axe des abscisses.
- ✓ Répéter le processus pour représenter les autres termes

Exemple Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$$

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$. Puis Construire les 4 premiers termes de (U_n) .

7) Limite d'une suite numérique

a) Définition

Soit (U_n) suite numérique de terme général U_n . Calculer la limite de la suite, c'est calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

b) Méthodes de calcul de limite

✓ **Propriété**

Soit (U_n) une suite numérique définie par : $U_n = f(n)$, où f est une fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$ alors U_n a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

✓ **Théorème de minoration**

si à partir d'un certain rang n_0 , on a $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

✓ **Théorème de majoration**

si à partir d'un certain rang n_0 , on a $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

✓ **Théorème des gendarmes**

si à partir d'un certain rang n_0 , on a $W_n \leq U_n \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$$

8-Notion de convergence

a) Définition

- ✓ Une suite est convergente si elle a une **limite finie**.
- ✓ Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

b) Propriétés

- ✓ Toute suite croissante et majorée est convergente
- ✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente

c) Convergence d'une suite définie par récurrence

Soit (U_n) une suite dont le terme général vérifie $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction.

Si la suite (U_n) converge vers un réel l et que f est continue en l alors $f(l) = l$.

NB : Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée **point fixe** de la fonction f . L'existence d'un point fixe pour la fonction f ne prouve pas que la suite (U_n) telle que $U_{n+1} = f(U_n)$ converge

II- Suites arithmétiques-Suites géométriques

1- Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite (U_n) est dite arithmétique lorsqu'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = r$
 r est appelé **la raison** de la suite (U_n) .

Remarque

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique, il suffit donc de montrer que la différence $U_{n+1} - U_n$ est constante.

b) Expression du terme général U_n en fonction de n

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_p , $p \in \mathbb{N}$ et de raison r . Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, U_n = U_p + (n - p)r$$

NB : En particulier, lorsque le premier terme de la suite (U_n) est U_0 on a : $U_n = U_0 + nr$

Bon à savoir :

- ✓ Toute suite numérique (U_n) dont le terme général est de la forme $U_n = an + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une suite arithmétique.

- ✓ a, b, c dans cet ordre sont en progression arithmétique ssi $a + c = 2b$.

c) Calcul de somme des termes consécutifs

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r .

On pose $S_n = \sum_{k=p}^n U_k = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n$ la somme des termes consécutifs

S_n peut être calculé par la formule $S_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2}$

d) Sens de variation

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

- ✓ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- ✓ Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- ✓ Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

On considère la suite numérique (U_n) de terme général $U_n = 2n + 3$. Montrer que (U_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. Quelle est le sens de variation de (U_n) .

2-Suites géométriques

a) Définition

Une suite (U_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = qU_n$. q est appelé la **raison** de la suite (U_n) .

Remarque

Pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique, il suffit donc de montrer que le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est une constante.

b) Expression du terme général U_n en fonction de n

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_p , $p \in \mathbb{N}$ et de raison q . Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, U_n = U_p q^{n-p}$

NB : En particulier, lorsque le premier terme de la suite (U_n) est U_0 on a : $U_n = U_0 q^n$

Remarque : a, b, c dans cet ordre sont en progression géométrique ssi $ac = b^2$.

c) Calcul de somme des termes consécutifs

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 , et de raison q ($q \neq 1$).

On pose $S_n = \sum_{k=p}^n U_k = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n$ la somme des termes consécutifs

S_n peut être calculée par la formule $S_n = U_p \times \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$

Exemple

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n \end{cases}$

Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (U_n) .

d) Limite de la suite géométrique q^n

Soit q un nombre réel et n strictement positif.

- Si $q = 1$ alors et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$ q^n n'a pas de limite.